

# Extension de la méthode des quadripôles thermiques à l'aide de transformations intégrales—calcul du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel

J. C. BATSALE, D. MAILLET et A. DEGIOVANNI

L.E.M.T.A.-ENSEM, U.R.A.-C.N.R.S. 875, 2 AV de la forêt de Haye, 54516 Nancy Cedex, France

(Reçu 1 février 1993 et sous forme finale 25 mai 1993)

**Résumé**—La méthode des quadripôles, utilisée pour les problèmes de diffusion thermique monodimensionnels est étendue aux cas bi ou tridimensionnels. L'idée est d'utiliser les méthodes de transformation intégrales (en général de Fourier) sur certaines variables d'espace, et une transformation de Laplace sur la variable temps. Le calcul du transfert thermique au travers de milieux constitués de multicouches est alors réduit à un produit de matrices dans l'espace transformé. Une deuxième partie de ce travail traite du calcul du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel. On développe alors, en plus de la méthode des quadripôles, des méthodes de perturbations ou d'inversion de matrices pour résoudre l'équation intégrale engendrée par ce problème

## 1. INTRODUCTION

DANS LE CAS de transfert thermique unidirectionnel, la méthode des quadripôles thermiques permet une représentation simple des transferts dans des systèmes complexes (voir Degiovanni [1]).

Lorsque l'on s'intéresse à des valeurs moyennes de température et de flux, cette méthode permet également de traiter les cas 'globalement unidirectionnels', c'est à dire en particulier de prendre en compte les phénomènes de constriction des lignes de flux.

L'article de Dorkel *et al.* [2] nous a donné l'idée d'étendre cette approche pour les transferts bi et tridimensionnels, c'est ce que nous proposons ici.

Nous exposons tout d'abord les règles relatives à certaines transformations intégrales simples permettant l'extension de l'utilisation des quadripôles thermiques monodimensionnels. Nous montrons ensuite la solution analytique exacte du transfert thermique au travers d'un défaut plan bidimensionnel. Une méthode de perturbations peut permettre dans certains cas, une accélération considérable du calcul numérique de la solution.

## 2. UTILISATION DES TRANSFORMATIONS INTÉGRALES

2.1. *Transfert dans un mur homogène sans source interne avec conditions aux limites latérales homogènes et température initiale nulle (voir Fig. 1)*

Le système d'équations associé s'écrit :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\text{en } x = 0 \quad \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} = h_{x1} T \quad (2a)$$

$$\text{en } x = l \quad -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} = h_{x2} T \quad (2b)$$

$$\text{en } y = 0 \quad \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} = h_{y1} T \quad (2c)$$

$$\text{en } y = L \quad -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} = h_{y2} T \quad (2d)$$

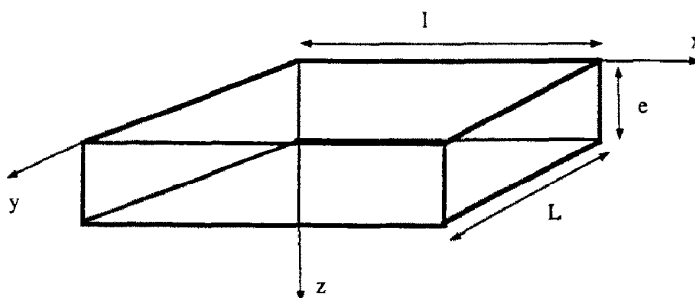


FIG. 1. Caractéristiques géométriques du mur homogène.

**NOMENCLATURE**

*A, B, C, D* termes de la matrice de passage  
*a* diffusivité thermique suivant l'axe *z*,  
 ( $\lambda_{zz}/\rho c$ )  
 [ $C_{k,k+1}$ ] matrice de contact  
 [ $E_k$ ] vecteur d'entrée  
*F(x, β, z, p)* soit la transformée de Laplace  
 Fourier d'un terme source classique : soit  
 un terme résiduel dû à des conditions  
 non-homogènes ou à une condition  
 initiale non-nulle  
*f(x, β, z, p)* solution particulière  
*G(x)* transformée de Laplace-Fourier de  
 l'excitation de flux en face avant (Dirac  
 en temps)  
*H* nombre de Biot relatif aux échanges  
 convectifs latéraux  
*h* coefficient d'échange convectif  
*l, L, b, c* dimensions caractéristiques du  
 milieu  
 [ $M_k$ ] matrice de transfert  
 [ $M_2$ ] matrice carrée  
 [ $M_1$ ] matrice carrée diagonale  
 [ $P_k$ ] vecteur source  
*p* variable de Laplace  
 [ $Q_{k,k+1}$ ] vecteur source  
*Q, V* transformée de Laplace-Fourier de  
*q* et *v*  
*q, v* source de flux et de tension  
*R* résistance de contact  
 [ $S_k$ ] vecteur de sortie

*T* température dans l'espace réel  
*t* temps  
 [ $V$ ] vecteur colonne  
*X, Y* sources dues à *F*  
*y, x, z* coordonnées d'espace.

**Symboles grecs**

$\alpha, \beta$  variables de Fourier (fréquences  
 d'espace)  
 $\alpha_n, \beta_m$  solutions des équations transcendantes  
 (fréquences d'espace)  
 $\Delta\tau(t, x, p)$  contraste de température en face  
 arrière  
 $\delta$  distribution de Dirac ou symbole de  
 Kronecker  
 $\varepsilon$  petit terme (résistance réduite)  
 $\theta$  transformée intégrale de  $\tau$  en espace  
 $\lambda$  conductivité thermique  
 $\tau$  transformée de Laplace de *T* en *t*  
 $\phi$  transformée intégrale de la densité de flux  
 de chaleur  
 $\varphi$  densité de flux de chaleur dans l'espace  
 réel  
 [ $\Phi$ ] vecteur colonne.  
 $\psi$  transformé de Laplace de la densité de  
 flux de chaleur

**Opérateur**

\* opérateur multiplication de matrices.

en  $z = 0$ : Flux imposé:  $\varphi(x, y, 0, t)$   
 ou Température imposée:  $T(x, y, 0, t)$  (2c)  
 en  $z = l$ : Flux imposé:  $\varphi(x, y, l, t)$   
 ou Température imposée:  $T(x, y, l, t)$  (2f) et  
 à  $t = 0$   $T(x, y, z, t) = 0$ . (2g)

( $T \rightarrow \tau$ ;  $\varphi \rightarrow \psi$ )

$$\tau(x, y, z, p) = \int_0^t T(x, y, z, t) \exp(-pt) dt$$

et

$$\psi(x, y, z, p) = \int_0^l \varphi(x, y, z, t) \exp(-pt) dt. \quad (3)$$

Avec:

*h*: Coefficient d'échange convectif ;

La solution du problème est alors de la forme (voir Ozizik [3, chapitre II]) :

$$\tau(x, y, z, p) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\alpha_n, \beta_m, z, p) \frac{(\beta_m L \cos(\beta_m y) + H_{y1} \sin(\beta_m y))}{N(\beta_m)} \frac{(\alpha_n l \cos(\alpha_n x) + H_{x1} \sin(\alpha_n x))}{N(\alpha_n)}. \quad (4)$$

*e, l, L*: Dimensions du domaine;  
*S = lL*: Section;  
 $\lambda$ : Conductivité thermique;  
*T*: Température;  
*x, y, z*: Coordonnées d'espace et indices relatifs.

Avec  $\alpha_n$  et  $\beta_m$  solutions des équations trans-  
 cendantes suivantes:

$$\tan(\alpha_n l) = \frac{(\alpha_n l)(H_{x1} + H_{x2})}{(\alpha_n l)^2 - H_{x1} H_{x2}} \quad (5)$$

$$\tan(\beta_m L) = \frac{(\beta_m L)(H_{y1} + H_{y2})}{(\beta_m L)^2 - H_{y1} H_{y2}} \quad (6)$$

On utilise la transformation de Laplace en *t*, pour  
 les températures et les densités surfaciques de flux

et :

$$N(\alpha_n) = \frac{1}{2} \left( ((\alpha_n l)^2 + H_{x1}^2) \left( 1 + \frac{H_{x2}}{(\alpha_n l)^2 + H_{x2}^2} \right) + H_{x1} \right) \quad (7)$$

$$N(\beta_m) = \frac{L}{2} \left( ((\beta_m L)^2 + H_{y1}^2) \times \left( 1 + \frac{H_{y2}}{(\beta_m L)^2 + H_{y2}^2} \right) + H_{y1} \right) \quad (8)$$

avec :

$$H_{x1} = \frac{h_{x1} l}{\lambda_x} : \text{ Nombre de Biot relatif aux échanges convectifs latéraux selon } x;$$

$$H_{y1} = \frac{h_{y1} L}{\lambda_y} : \text{ Nombre de Biot relatif aux échanges convectifs latéraux selon } y.$$

Les coefficients  $\theta(\alpha_n, \beta_m, z, p)$  de la double décomposition de  $\tau$  sur une base orthogonale, peuvent alors s'exprimer sous la forme d'une transformation intégrale en  $x$  et  $y$  (on assimile  $\alpha_n$  et  $\beta_m$  à  $\alpha$  et  $\beta$ ) :

$$\theta(\alpha, \beta, z, p) = \int_0^l \int_0^L \tau(x, y, z, p) (\beta L \cos(\beta y) + H_{y1} \sin(\beta y)) dy \times (\alpha l \cos(\alpha x) + H_{x1} \sin(\alpha x)) dx. \quad (9)$$

On peut de la même façon exprimer la densité de flux de chaleur  $\phi$  dans la direction  $z$ , dans l'espace de Laplace-Fourier, en fonction de la densité de flux de chaleur  $\psi$  dans l'espace de Laplace :

$$\phi(\alpha, \beta, z, p) = -\lambda \frac{d\theta(\alpha, \beta, z, p)}{dz} = \int_0^l \int_0^L \psi(x, y, z, p) (\beta L \cos(\beta y) + H_{y1} \sin(\beta y)) dy \times (\alpha l \cos(\alpha x) + H_{x1} \sin(\alpha x)) dx. \quad (10)$$

On peut réécrire le système (1), (2) sous la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right) \theta = 0 \quad (11)$$

avec :

$$a = \frac{\lambda_z}{\rho c} : \text{ Diffusivité thermique suivant l'axe } z.$$

Cette équation devient une équation différentielle ordinaire. La forme générale de  $\theta$  est :

$$\theta(\alpha, \beta, z, p) = F \operatorname{ch} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right) z} \right) + G \operatorname{sh} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right) z} \right). \quad (12)$$

$F$  et  $G$  sont des constantes déterminées par les conditions aux limites en  $z = 0$  :

$$F = \theta(\alpha, \beta, 0, p) \quad (13)$$

et :

$$G = \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right)}} \left( \frac{d\theta}{dz}(\alpha, \beta, 0, p) \right) = \frac{-1}{\lambda_z \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right)}} \phi(\alpha, \beta, 0, p). \quad (14)$$

Il existe alors, comme en régime monodimensionnel, une relation linéaire telle que :

$$\theta(\alpha, \beta, 0, p) = A\theta(\alpha, \beta, e, p) + B S\phi(\alpha, \beta, e, p) \quad (15)$$

$$S\phi(\alpha, \beta, 0, p) = C\theta(\alpha, \beta, e, p) + D S\phi(\alpha, \beta, e, p). \quad (16)$$

La détermination de deux des fonctions  $\theta(\alpha, \beta, 0, p)$ ,  $\phi(\alpha, \beta, 0, p)$ ,  $\theta(\alpha, \beta, e, p)$  ou  $\phi(\alpha, \beta, e, p)$  permet de définir entièrement le système.

Une représentation matricielle serait :

$$\begin{pmatrix} \theta(\alpha, \beta, 0, p) \\ S\phi(\alpha, \beta, 0, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\alpha, \beta, e, p) \\ S\phi(\alpha, \beta, e, p) \end{pmatrix} \quad (17)$$

avec :

$$A = D = \operatorname{ch} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right) e} \right) \\ B = \frac{1}{S\lambda_z \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right)}} \\ \times \operatorname{sh} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right) e} \right) \\ C = S\lambda_z \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right)} \\ \times \operatorname{sh} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right) \alpha^2 + \left( \frac{\lambda_y}{\lambda_z} \right) \beta^2 \right) e} \right). \quad (18)$$

La formule d'inversion permettant d'exprimer  $\tau(x, y, z, p)$  en fonction de  $\theta(\alpha, \beta, z, p)$  est l'expression (4).

Il faut remarquer que les formules de transformation dépendent des nombres de Biot associés aux limites en  $x$  et  $y$ . La résolution, dans le cas général, des équations transcendantes (5) et (6) et ensuite le calcul complet de la série (4) sont lourds, avant de pouvoir remonter à  $T(x, y, z, t)$  par une inversion numérique de Laplace.

Quelques cas particuliers permettent d'alléger considérablement le calcul.

Ces cas particuliers intéressants sont ceux pour lesquels les équations transcendantes donnent des racines régulièrement espacées, soit en fait les con-

ditions aux limites en  $x$  et  $y$  du système du type :

surface isothermes ( $H \rightarrow \infty$ ,  $T = 0$ )  
surfaces adiabatiques ( $H \rightarrow 0$ ,  $\phi = 0$ )  
milieu infini.

La raison principale est (voir l'exemple d'application au paragraphe 2) que ces conditions permettent une sommation numérique par transformée de Fourier rapide.

Nous tirons de Carslaw et Jaeger [4, chapitre XVII], différents cas de transformations de Fourier, sans les détailler. Dans des géométries autres que cartésiennes (cylindriques, sphériques...), d'autres transformations sont utilisables (Hankel, Mellin, Mehler-Fock...) (voir Sneddon [5]), mais à notre connaissance, sans algorithme de transformation rapide.

Dans un souci de simplicité d'écriture, nous donnons uniquement les transformations dans une seule dimension ( $x$ ) et supposons que le problème est bidimensionnel en  $(x, z)$ .

*Cas d'une surface isotherme en  $x = 0$ .* Dans le cas d'une surface isotherme en  $x = 0$ , les transformations intégrales se réduisent à une transformation de Fourier en Sinus de la forme :

$$\theta(z, z, p) = \int_0^l \tau(x, z, p) \sin(\alpha x) dx. \quad (19)$$

La formule d'inversion est un cas particulier de la série (4).

Si en  $x = l$ ,  $\tau(l, z, p) = 0$  alors :

$$\tau(x, z, p) = (2/l) \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n\pi/l, z, p) \sin(n\pi x/l). \quad (20)$$

Si en  $x = l$

$$\frac{\partial \tau(l, z, p)}{\partial x} = 0$$

alors :

$$\begin{aligned} \tau(x, z, p) = & (1/l)\theta(\pi/2l, z, p) \sin(\pi x/2l) \\ & + (2/l) \sum_{n=1}^{\infty} \theta((n+1/2)\pi/l, z, p) \\ & \times \sin((n+1/2)\pi x/l). \quad (21) \end{aligned}$$

*Cas d'une surface adiabatique en  $x = 0$ .* Dans le cas d'une surface adiabatique en  $x = 0$ , on utilise une transformation de Fourier en Cosinus de la forme :

$$\theta(z, z, p) = \int_0^l \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx. \quad (22)$$

La formule d'inversion est un cas particulier de la série (4).

Si en  $x = l$ ,  $\tau(l, z, p) = 0$  alors :

$$\begin{aligned} \tau(x, z, p) = & (2/l) \sum_{n=0}^{\infty} \theta((n+1/2)\pi/l, z, p) \\ & \times \cos((n+1/2)\pi x/l). \quad (23) \end{aligned}$$

Si en  $x = l$

$$\frac{\partial \tau(l, z, p)}{\partial x} = 0$$

alors :

$$\begin{aligned} \tau(x, z, p) = & (1/l)\theta(0, z, p) \\ & + (2/l) \sum_{n=1}^{\infty} \theta(n\pi/l, z, p) \cos(n\pi x/l). \quad (24) \end{aligned}$$

*Cas d'un milieu semi-infini en  $x$ .* Dans le cas d'un milieu semi-infini, les transformées analogues aux précédentes comportent des formules d'inversion symétriques. On obtient pour le premier cas :

$$\theta(z, z, p) = \int_0^{\infty} \sqrt{(2/\pi)} \tau(x, z, p) \sin(\alpha x) dx \quad (25)$$

avec pour formule d'inversion :

$$\tau(x, z, p) = \int_0^{\infty} \sqrt{(2/\pi)} \theta(z, z, p) \sin(\alpha x) dz. \quad (26)$$

Pour le second cas :

$$\theta(z, z, p) = \int_0^{\infty} \sqrt{(2/\pi)} \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx. \quad (27)$$

Avec pour formule d'inversion :

$$\tau(x, z, p) = \int_0^{\infty} \sqrt{(2/\pi)} \theta(z, z, p) \cos(\alpha x) dz. \quad (28)$$

*Cas d'un milieu infini en  $x$ .* Dans les cas d'un milieu infini, on utilise une transformation de Fourier complexe de la forme :

$$\theta(z, z, p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau(x, z, p) \exp(izx) dx. \quad (29)$$

La formule d'inversion est alors :

$$\tau(x, z, p) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(z, z, p) \exp(-izx) dz. \quad (30)$$

## 2.2. Etude générale de problèmes non-homogènes

En complément du paragraphe précédent, l'étude générale d'un problème bidimensionnel non-homogène se réduit à l'étude d'un mur, en régime transitoire, présentant des sources internes réparties dans les 2 directions de l'espace et dépendantes du temps, les conditions aux limites en  $x$  étant soit à température soit à flux imposé non forcément nul, le mur n'étant pas forcément à l'instant initial. Ceci revient à résoudre un système de la forme :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} + F(z, z, p) - \gamma^2 \theta = 0 \quad (31)$$

avec

$$\gamma^2 = \frac{p}{a} + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} x. \quad (32)$$

$F(z, z, p)$  est soit la transformée de Laplace-Fourier

d'un terme source classique, soit un terme résiduel dû à des conditions aux limites non-homogènes ou à une condition initiale non-nulle.

On peut voir sur quelques cas ci-dessous que les transformations de Fourier introduisent un terme source dans l'équation générale dans le cas de conditions aux limites latérales non-homogènes :

- températures imposées non-nulles en  $x = 0$  et en  $x = l$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \tau(x, z, p)}{\partial x^2} \sin(\alpha x) dx = -\alpha^2 \theta(\alpha, z, p) + \alpha(\tau(0, z, p) - \cos(\alpha l)\tau(l, z, p)) \quad (33a)$$

avec :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^l \tau(x, z, p) \sin(\alpha x) dx \quad \text{et } \alpha = n\pi/l; n \text{ entier positif ;} \quad (33b)$$

- flux imposés non-nuls en  $x = 0$  et en  $x = l$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \tau(x, z, p)}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \theta(\alpha, z, p) + \left( \cos(\alpha l) \frac{\partial \tau(l, z, p)}{\partial x} - \frac{\partial \tau(0, z, p)}{\partial x} \right) \quad (34a)$$

avec :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^l \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx \quad \text{et } \alpha = n\pi/l; n \text{ entier positif ;} \quad (34b)$$

- flux imposé non-nul en  $x = 0$  et en température imposée non-nulle en  $x = l$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 \tau(x, z, p)}{\partial x^2} \cos(\alpha x) dx = -\alpha^2 \theta(\alpha, z, p) + \alpha \sin(\alpha l) \tau(l, z, p) - \frac{\partial \tau(0, z, p)}{\partial x} \quad (35a)$$

avec :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^l \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx \quad \text{et } \alpha = (n+1/2)\pi/l; n \text{ entier positif.} \quad (35b)$$

De même, la transformation de Laplace introduit un terme source dans l'équation générale, dans le cas d'un profil de température non-nul à l'instant initial :

$$\int_0^x \frac{\partial T(x, z, t)}{\partial t} \exp(-pt) dt = p\tau(x, z, p) - T(x, z, 0). \quad (36)$$

La solution de l'équation (31) est de la forme :

$$\theta(\alpha, z, p) = K1 \operatorname{ch}(\gamma z) + K2 \operatorname{sh}(\gamma z) + f(\alpha, z, p) \quad (37)$$

et  $f$  est une solution particulière de (31) qui peut

être obtenue par exemple par un développement de la forme :

$$f(\alpha, z, p) = \frac{1}{\lambda_z \gamma^2} \left( F(\alpha, z, p) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma^4} \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + \dots \right). \quad (38)$$

$K1$  et  $K2$  sont calculés à partir de  $\theta(0)$  et  $\phi(0)$ ; on en déduit alors les grandeurs de sortie  $\theta(e)$  et  $\phi(e)$  :

$$\theta(e) = (\theta(0) - f(0)) \operatorname{ch}(\gamma e) - ((\lambda_z f'(0) + \phi(0))/\lambda_z \gamma) \operatorname{sh}(\gamma e) + f(e) \quad (39)$$

$$\phi(e) = -\lambda_z \gamma (\theta(0) - f(0)) \operatorname{sh}(\gamma e) + (\lambda_z f'(0) + \phi(0)) \operatorname{ch}(\gamma e) - \lambda_z f'(e). \quad (40)$$

D'où l'expression des grandeurs d'entrée en fonction des grandeurs de sortie (voir Fig. 2) :

$$\begin{pmatrix} \theta(0) \\ S\phi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(e) \\ S\phi(e) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ SY \end{pmatrix} \quad (41)$$

avec,  $A, B, C, D$  décrits par les mêmes expressions que dans le cas passif et :

$$X = f(0) - f(e) \operatorname{ch}(\gamma e) + \frac{\operatorname{sh}(\gamma e)}{\gamma} f'(e). \quad (42)$$

$$Y = -\lambda_z (f'(0) + \gamma f(e) \operatorname{sh}(\gamma e) - \operatorname{ch}(\gamma e) f'(e)). \quad (43)$$

### 2.3. Conditions aux limites convectives en $z$

Les conditions en température ou en flux imposé sont traduites directement.

Les conditions aux limites de caractère plus général de type convectives et à flux imposé en  $z$  traduites comme suit :

en  $z = 0$  (a l'entrée du système) :

$$-\phi(\alpha, 0, p) = \lambda \frac{d\theta(\alpha, 0, p)}{dz} = h(\theta(\alpha, 0, p) - \theta_c) + Q_c \quad (44)$$

peuvent encore être présentées par le schéma de la Fig. 3 ou par la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \theta_c \\ S\phi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/hS \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \theta(0) \\ S\phi(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ SQ_c \end{pmatrix} \right) \quad (45)$$

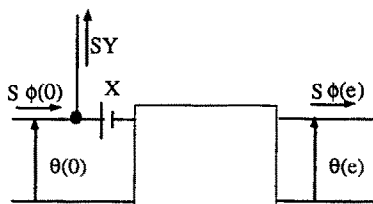


FIG. 2. Schéma électrique, traduisant la présence d'un source interne répartie, des conditions aux limites non-homogènes en  $x$  ou en  $y$ , ou une condition initiale non-nulle.

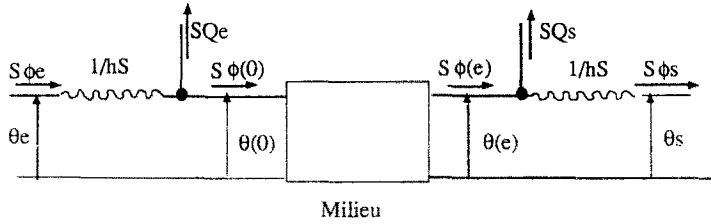


FIG. 3. Conditions aux limites en  $z$ .

et en  $z = e$  (à la sortie du système) :

$$\phi(x, e, p) = -\lambda \frac{d\theta(x, e, p)}{dz} = h(\theta(x, e, p) - \theta_s) + Q_s \tag{46}$$

par le schéma électrique de la Fig. 3 ou par la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \theta(e) \\ S\phi(e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ SQ_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1/hS \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_s \\ S\phi_s \end{pmatrix} \tag{47}$$

2.4. Empilement de plusieurs milieux en contact parfait

Le principal avantage de la représentation par quadripôles est le traitement particulièrement rapide des multicouches.

Pour que la méthode puisse s'étendre au transfert bi et tridimensionnel, il est nécessaire de vérifier les conditions de passage qui dans le cas du contact parfait s'écrivent à une profondeur  $z = e_1$  donnée :

$$\lambda_1 \frac{d\theta_1(x, e_1, p)}{dz} = \lambda_2 \frac{d\theta_2(x, e_1, p)}{dz} \tag{48a}$$

$$\theta_1(x, e_1, p) = \theta_2(x, e_1, p) \tag{48b}$$

Ceci implique que les transformations intégrales sur le milieu 1 soient les mêmes que sur le milieu 2. Conformément au paragraphe 2.1, ceci n'est vérifié que par des milieux ayant même limite géométrique et thermique en  $x$  ; en pratique les 3 cas intéressants sont ceux du paragraphe 2.1 :

- milieu infini,
- milieu de même dimension à température imposée,
- milieu de même dimension à flux imposé.

De même qu'en régime monodimensionnel, on peut alors traduire les transferts thermiques au travers de  $K$  couches successives.

Le transfert au travers de la  $k^{i\text{ème}}$  couche s'écrit :

$$[E_k] = [M_k][S_k] + [P_k] \tag{49}$$

avec :

- $[E_k]$  : Vecteur d'entrée
- $[M_k]$  : Matrice de transfert
- $[S_k]$  : Vecteur de transfert

$$[P_k] = \begin{pmatrix} X_k \\ SY_k \end{pmatrix} : \text{Vecteur source.}$$

Le transfert au travers des  $K$  couches s'écrit alors (voir Fig. 4) :

$$[E_1] = \left( \prod_{k=1}^K [M_k] \right) [S_K] + [P_1] + \sum_{k=2}^K \left( \prod_{i=1}^{k-1} [M_i] \right) [P_k] \tag{50}$$

2.5. Sources aux interfaces

Une source répartie uniforme ou non en  $x$  située à une profondeur  $z = e_k$  donnée, est traduite par un vecteur de la même façon qu'en régime monodimensionnel.

Soit  $q(x, e_k, t)$  une source de flux et  $r(x, e_k, t)$  une source de tension, transformées dans l'espace de Laplace-Fourier en  $Q(x, e_k, p)$  et  $V(x, e_k, p)$  on associe alors le vecteur source  $[Q_{k,k+1}]$ , tel que :

$$[Q_{k,k+1}] = \begin{pmatrix} V(x, e_k, p) \\ SQ(x, e_k, p) \end{pmatrix} \tag{51}$$

Il suffit alors de remplacer le vecteur  $[P_k]$  de l'ex-

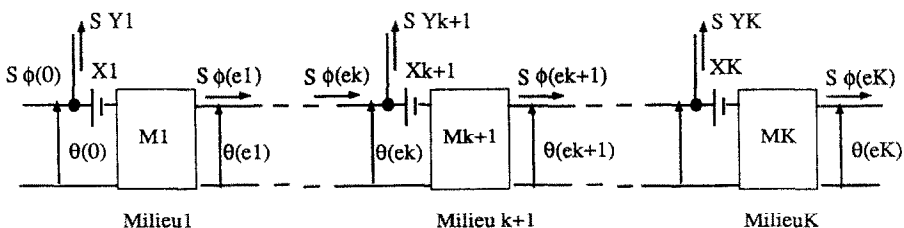


FIG. 4. Système complet.

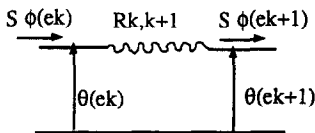


FIG. 5. Résistance de contact.

pression (50) par :

$$[P_k] + [M_k][Q_{k,k+1}]. \tag{52}$$

2.6. *Contacts imparfaits*

Si le contact entre les couches  $k$  et  $k + 1$  est imparfait, sans inertie, mais uniforme en  $x$  et  $y$ , on peut le représenter par une résistance pure  $R_{k,k+1}$  ou par la matrice  $[C_{k,k+1}]$  telle que :

$$[C_{k,k+1}] = \begin{pmatrix} 1 & R_{k,k+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Il suffit alors de remplacer la matrice  $[M_k]$  de l'expression (54) par :

$$[M_k][C_{k,k+1}]. \tag{54}$$

Le schéma correspondant est exposé sur la Fig. 5.

2.7. *Application simple de la méthode : transfert thermique au travers d'un bicouche avec résistance de contact uniforme*

Considérons deux murs similaires, plans, orthotropes de conductivités  $\lambda_x, \lambda_z$  de même épaisseur  $e_1$ , d'extension infinie, séparés par une résistance de contact uniforme (voir Fig. 6).

On applique une impulsion de flux de chaleur (distribution de Dirac en temps) de répartition quelconque en espace. On suppose que le milieu est à température nulle à l'instant initial. On prend en compte les échanges convectifs sur la face avant (en  $z = 0$ ) et sur la face arrière (en  $z = 2e_1$ ), en supposant que le fluide ambiant est à température nulle.

Puisque le matériau est de dimensions infinies, on applique une transformation de Fourier en  $x$  du type (9) et une transformation de Laplace en temps :

$$\theta(\alpha, z, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} T(x, z, t) \exp(-pt) dt \times \exp(-i\alpha x) dx. \tag{55}$$

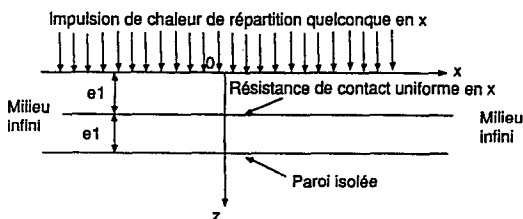


FIG. 6. Exemple de multicouche.

Les notations étant beaucoup plus légères dans l'espace de Laplace-Fourier, on écrira le système dans cet espace (les flux sont ici des densités de flux) :

$$\begin{pmatrix} \theta(\alpha, 0, p) \\ G(\alpha) - h\theta(\alpha, 0, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\alpha, 2e_1, p) \\ h\theta(\alpha, 2e_1, p) \end{pmatrix} \tag{56}$$

avec :

$$A = D = \text{ch} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right)^2 \right) \alpha^2} e_1 \right)$$

$$B = \frac{1}{\lambda_z \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right)^2 \right) \alpha^2}} \text{sh} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right)^2 \right) \alpha^2} e_1 \right)$$

$$C = \lambda_z \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right)^2 \right) \alpha^2} \text{sh} \left( \sqrt{\left( \frac{p}{a} + \left( \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \right)^2 \right) \alpha^2} e_1 \right) \tag{57}$$

et :

- $R$  : Résistance par unité de surface.
- $a = \frac{\lambda_z}{\rho c}$  : Diffusivité thermique suivant l'axe  $z$ .

$G(\alpha)$  : Transformée de Laplace-Fourier de l'excitation de densité de flux en face avant (ne dépend pas de  $p$ , car le Dirac en  $t$  est transformé en constante dans l'espace de Laplace).

La transformée de Laplace-Fourier du champ de température en face arrière donne, grâce à (56) :

$$\theta(\alpha, 2e_1, p) = \frac{G(\alpha)}{(2AC + RC^2) + 2h(A^2 + BC + RAC) + h^2(2AB + RA^2)}. \tag{58}$$

A ce stade, on peut utiliser les formules de la forme (30) pour la transformée inverse de Fourier et numériques (voir chapitre suivant) pour la transformée inverse de Laplace.

Cependant, il n'est pas toujours nécessaire d'inverser l'expression (58). On peut par exemple utiliser les valeurs moyennes du champ de température en calculant  $\theta(0, 2e_1, p)$ . On revient alors à un problème monodimensionnel que l'on peut traiter à l'aide des méthodes exposées en [1].

**3. CALCUL DU TRANSFERT THERMIQUE AU TRAVERS D'UN DÉFAUT PLAN BIDIMENSIONNEL**

Il faut souligner que dans le cas où la résistance de contact par unité de surface n'est pas uniforme en  $x$  et  $y$ , on ne peut plus utiliser la matrice (53). En effet,

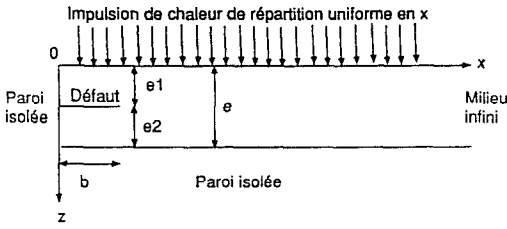


FIG. 7. Présentation géométrique du milieu infini comportant un défaut bidimensionnel.

récrivons la relation de passage entre le milieu  $k$  et  $k+1$  :

$$T_k - T_{k+1} = -R_{k,k+1}(x)\lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial z} \quad (59)$$

Ce problème est alors particulièrement difficile et des méthodes adaptées sont nécessaires. On peut utiliser soit une méthode fluxmétrique (voir [7, 8]) soit des méthodes de perturbation, soit une inversion de matrice dans l'espace de Laplace-Fourier.

Nous présentons maintenant une illustration de ces deux dernières méthodes en calculant le transfert de chaleur au travers d'un défaut plan bidimensionnel.

3.1. Milieu d'étendue infinie—exemple d'utilisation d'une méthode de perturbation

3.1.1. Présentation du problème. Etudions le cas d'un milieu comportant un défaut résistif uniforme de largeur finie  $2b$  et d'extension infinie en  $x$  (voir Fig. 7). L'illustration typique est une mince couche d'air due à un délaminage dans un matériau composite.

Ce problème est difficile à résoudre à l'aide d'une méthode numérique classique (éléments finis ou différences finies), puisqu'il demande un maillage important au voisinage de la singularité (ici le défaut). D'autre part, la recherche de solutions analytiques est d'un grand intérêt si l'on cherche à identifier les paramètres relatifs au défaut (voir Maillet [6]).

Le système permettant de décrire les transferts thermiques dans le matériau soumis à une impulsion de densité d'énergie  $Q$  par unité de surface, uniforme en  $x$  sur la face  $z = 0$  (face avant), s'écrit dans l'espace de Laplace et en supposant que la répartition de température est nulle dans le matériau à l'instant initial :

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + \frac{\lambda_x}{\lambda_z} \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} - \frac{p}{a} \tau = 0 \quad (60)$$

$$\text{en } x = 0 \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad (\text{Par symétrie}) \quad (61a)$$

$$\text{en } x \rightarrow \infty \quad \tau \text{ finie} \quad (61b)$$

$$\text{en } z = 0 \quad -\lambda_z \frac{\partial \tau(x, 0, p)}{\partial z} = Q \quad (61c)$$

$$\text{en } z = e_1 \quad -\lambda_z \frac{\partial \tau^{\text{sup}}(x, e_1, p)}{\partial z} = -\lambda_z \frac{\partial \tau^{\text{inf}}(x, e_1, p)}{\partial z} \quad (61d)$$

$$\text{et } \tau^{\text{sup}}(x, e_1, p) = \tau^{\text{inf}}(x, e_1, p) \quad \text{si } |x| > b \quad (61e)$$

$$\tau^{\text{sup}}(x, e_1, p) = \tau^{\text{inf}}(x, e_1, p) + R \left( -\lambda_z \frac{\partial \tau(x, e_1, p)}{\partial z} \right) \quad \text{si } |x| < b. \quad (61f)$$

Cette relation traduit la continuité des densité surfaciques de flux et des températures en  $z = e_1$ , entre la face supérieure du défaut (notée sup) et la face inférieure (notée inf).

$$\text{en } z = e_1 + e_2 \quad \frac{\partial \tau(x, e, p)}{\partial z} = 0 \quad (61g)$$

3.1.2. Transformation intégrale et méthode des quadripôles. On réduit les variables du système, en considérant que la résistance thermique  $R$  du défaut est faible en regard de la résistance des parois qui l'entourent, on effectue les réductions suivantes des variables :

$$\tau \rightarrow \frac{\tau}{eQ};$$

$$\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{Q}$$

$$x \rightarrow \frac{x}{e} \sqrt{\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_x}\right)}$$

$$b \rightarrow \frac{b}{e} \sqrt{\left(\frac{\lambda_z}{\lambda_x}\right)}$$

$$z \rightarrow z/e$$

$$e_1 \rightarrow e_1/e$$

$$p \rightarrow (p/a)e^2$$

$$\varepsilon = \frac{R}{(e/\lambda)} \quad (\text{considéré ici comme le petit terme}). \quad (62)$$

On effectue la transformation de Fourier en Cosinus de  $\tau(x, z, p)$  :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^\infty \sqrt{(2/\pi)} \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx. \quad (63)$$

Notons qu'ici, à la différence de ce qui a été défini au paragraphe 1,  $\alpha$  est une variable sans dimension.

Les conditions aux limites en  $x = 0$  ( $\partial \tau / \partial x = 0$ ) et  $x \rightarrow \infty$  ( $\tau$  finie), permettent de transformer l'expression (61, 62) :

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - (p + \alpha^2) \theta = 0. \quad (64)$$

Le retour dans l'espace de Laplace est donné par l'expression suivante :

$$\tau(x, z, p) = \int_0^\infty \sqrt{(2/\pi)} \theta(\alpha, z, p) \cos(\alpha x) d\alpha. \quad (65)$$



D'après le premier paragraphe, à chaque partie constitutive de l'échantillon correspond une matrice de passage.

Dans le cas de conditions aux limites de type méthode flash (impulsion de chaleur brève en  $z = 0$  et échantillon isolé en  $z = 1$ , sur la face arrière), le système s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \theta(0) \\ \sqrt{(\pi/2)\delta(\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{\text{sup}}(e_1) \\ \phi(e_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{\text{sup}}(e_1) \\ \phi(e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{\text{inf}}(e_1) + \varepsilon \int_0^b \sqrt{(2/\pi)} \psi(x, e_1, p) \cos(\alpha x) dx \\ \phi(e_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{\text{inf}}(e_1) \\ \phi(e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (66)$$

avec :

$$A_i(\alpha, p) = \text{ch}(\sqrt{(p+\alpha^2)}e_i) = D_i(\alpha, p)$$

$$B_i(\alpha, p) = \frac{1}{\sqrt{(p+\alpha^2)}} \text{sh}(\sqrt{(p+\alpha^2)}e_i)$$

$$C_i(\alpha, p) = \sqrt{(p+\alpha^2)} \text{sh}(\sqrt{(p+\alpha^2)}e_i). \quad (67)$$

On constate que la condition en flux en  $z = 0$ , uniforme en  $x$  dans l'espace de Laplace simple, se transforme en distribution de Dirac dans l'espace de Laplace-Fourier.

3.1.3. Résolution de l'équation intégrale (66) par méthode de perturbations. Pour résoudre l'équation intégrale (66), nous proposons d'utiliser une méthode de perturbations en considérant que  $\varepsilon$  est ici le petit terme (à ce sujet, les réfs. [9, 10] constituent des ouvrages généraux et les réfs. [11, 12] sont relatives aux transferts thermiques dans les matériaux composites). La méthode consiste tout d'abord à exprimer les variables du modèle sous forme d'une série entière comme suit :

$$\theta(\alpha, z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n(\alpha, z, p) \varepsilon^n \quad (68)$$

$$\phi(\alpha, z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\alpha, z, p) \varepsilon^n. \quad (69)$$

On injecte ensuite les séries dans le système et on identifie terme à terme en  $\varepsilon^n$ . On obtient alors une suite de systèmes à résoudre :

A l'ordre  $\varepsilon^0$

On constate que ce problème est le problème mono-dimensionnel, dans le cas d'une paroi homogène :

$$\begin{pmatrix} \theta_0(0) \\ \sqrt{(\pi/2)\delta(\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0(1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (70)$$

Il est plus pratique de rester dans l'espace de Laplace simple pour manier ce système. On tire une expression utile pour la suite :

$$\psi_0(x, e_1, p) = \frac{\text{sh}(\sqrt{(p)}e_2)}{\text{sh}(\sqrt{(p)})}. \quad (71)$$

A l'ordre  $\varepsilon^1$

Il apparaît ici, un terme source en température provenant du problème à l'ordre 0.

$$\begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^{\text{sup}}(e_1) \\ \phi_1(e_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1^{\text{sup}}(e_1) \\ \phi_1(e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1^{\text{inf}}(e_1) + \int_0^b \sqrt{(2/\pi)} \psi_0(x, e_1, p) \cos(\alpha x) dx \\ \phi_1(e_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1^{\text{inf}}(e_1) \\ \phi_1(e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(1) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Les représentations quadripolaires des transferts à l'ordre  $\varepsilon^0$  et  $\varepsilon^1$  sont illustrées sur la Fig. 8.

On obtient :

$$\theta_1(1) = - \frac{\sqrt{(2/\pi)} \text{sh}(\sqrt{(p+\alpha^2)}e_1) \text{sh}(\sqrt{(p)}e_2) \sin(\alpha b)}{\alpha \text{sh}(\sqrt{(p)}) \text{sh}(\sqrt{(p+\alpha^2)})}. \quad (73)$$

Le produit de  $\theta_1(1)$  par  $\varepsilon$  est une approximation du contraste de la transformée de Fourier de la réponse en face arrière. Le contraste est défini comme la différence entre la réponse en température du matériau homogène et celle du matériau avec défaut :

$$\Delta\theta(\alpha, 1, p) = \theta(\alpha, 1, p) - \frac{\sqrt{(2/\pi)}\delta(\alpha)}{\sqrt{(p)} \text{sh}(\sqrt{(p)})}. \quad (74)$$

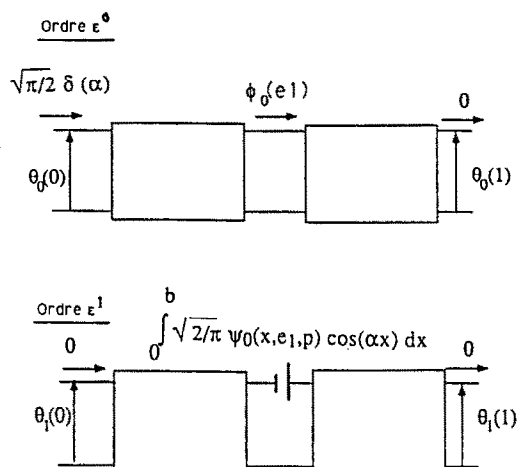


FIG. 8. Schéma électrique relatif à la méthode de perturbations.

Des images thermographiques obtenues par caméra infrarouge peuvent être traitées directement dans l'espace de Laplace-Fourier et comparées à cette expression.

On peut cependant écrire formellement l'expression de la température dans l'espace de Laplace simple, puisque la transformation de Fourier en cosinus est symétrique. On obtient donc un développement approché de réponse en température en face arrière :

$$\begin{aligned} \tau(x, 1, p) = & \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \\ & \times \left( 1 - \varepsilon(2/\pi)\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2) \cdot \right. \\ & \left. \times \int_0^x \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p+x^2)}e_1) \sin(xb) \cos(\alpha x)}{\operatorname{sh}(\sqrt{(p+x^2)}\alpha)} d\alpha \right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{75}$$

Cette intégrale n'a pas d'expression analytique simple, c'est pourquoi l'identification des termes d'ordre supérieur est difficile. Il est possible d'en effectuer une intégration numérique (voir le paragraphe 3.3), cependant cette expression est directement intéressante à deux titres :

- Elle montre qu'en présence de plusieurs défauts de faible résistance répartis de façon quelconque, ce sont les contrastes qui s'ajoutent ; la solution générale apparait sous la forme :

$$\begin{aligned} \tau(x, 1, p) = & \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} (1 - \varepsilon_1 f_1(p, x) - \varepsilon_2 f_2(p, x) \\ & - \varepsilon_3 f_3(p, x) \dots) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{76}$$

où :

- $f_i$  : Fonctions des dimensions et de la position de chaque défaut ;
- $\varepsilon_i$  : Résistance réduite de chaque défaut.

- Des expressions analytiques aux temps courts et aux temps longs existent, ce qui est un avantage considérable lorsque l'on cherche à identifier ces résistances (Méthodes inverses).

3.1.4. *Approximation aux temps courts.* L'expression (75) se simplifie aux temps courts ( $p$  grand). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \tau(x, 1, p) = & \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \\ & \times \left( 1 - \varepsilon(2/\pi)\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2) \right. \\ & \left. \times \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_1)}{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \int_0^x \frac{\sin(\alpha b) \cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha \right) \end{aligned} \tag{77}$$

or :

$$\int_0^x \frac{\sin(\alpha b) \cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 < x < b \\ \pi/4 & \text{si } x = b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases} \tag{78}$$

donc :

Si  $x < b$  (sous le défaut)

$$\begin{aligned} \tau(1, x, p) = & \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \\ & \times \left( 1 - \varepsilon\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2) \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_1)}{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \right). \end{aligned} \tag{79}$$

Cette expression est le développement de l'expression exacte dans le cas d'un défaut uniformément réparti :

$$\begin{aligned} \tau(1, x, p) = & \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}) + \varepsilon p \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2) \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_1)} \end{aligned} \tag{80}$$

Si  $x > b$  (a l'extérieur du défaut)

$$\tau(1, x, p) = \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \tag{81}$$

C'est la solution non perturbée.

On peut dire qu'aux temps courts, le transfert est monodimensionnel.

3.1.5. *Approximation aux temps longs.* L'expression (75) se simplifie aux temps longs ( $p$  petit) On obtient alors :

$$\begin{aligned} \tau(x, 1, p) = & \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \\ & \times \left( 1 - \varepsilon(2/\pi)\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2) \right. \\ & \left. \times \int_0^x \frac{\operatorname{sh}(\alpha e_1) \sin(\alpha b) \cos(\alpha x)}{\operatorname{sh}(\alpha)\alpha} d\alpha \right) + O(\varepsilon). \end{aligned} \tag{82}$$

Ce qui donne d'après Oberhettinger [13] :

$$\begin{aligned} \tau(x, 1, p) = & \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \\ & - \varepsilon \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2)}{\pi \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \left( \arctan \left( \tan \left( \frac{\pi e_1}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{\pi(x+b)}{2} \right) \right) \right. \\ & \left. - \arctan \left( \tan \left( \frac{\pi e_1}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{\pi(x-b)}{2} \right) \right) \right). \end{aligned} \tag{83}$$

3.2. *Milieu d'étendue finie (voir Fig. 9)*

3.2.1. *Présentation du problème.* Le cas du milieu d'étendue finie consiste à changer uniquement la condition (61b) dans le système (60), (61).

On impose ici en  $x = l$  :

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \tag{84}$$

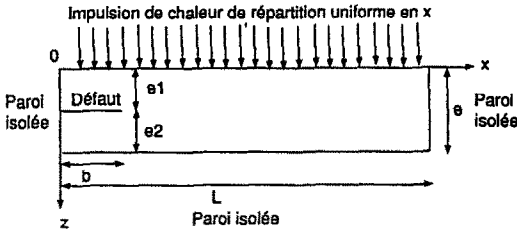


FIG. 9. Présentation géométrique du milieu fini comportant un défaut.

On doit traduire la largeur de l'échantillon en variable réduite, comme suit :

$$l \rightarrow \frac{l}{e} \sqrt{\frac{\lambda_z}{\lambda_x}}. \quad (85)$$

Toutes les réductions du paragraphe 3.1 restent valables.

3.2.2. Transformation intégrale quadripôles. La transformation intégrale à utiliser est (20) au lieu de (25) :

$$\theta(\alpha, z, p) = \int_0^l \tau(x, z, p) \cos(\alpha x) dx. \quad (86)$$

La variable  $\alpha$  n'est plus quelconque, mais limitée aux valeurs discrètes :

$$\alpha = k\pi/l \quad (87)$$

avec  $k$  entier positif ou nul.

Avec la nouvelle condition (84), l'expression (64) reste inchangée :

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - (p + \alpha^2)\theta = 0. \quad (88)$$

Le retour dans l'espace de Laplace est donné par :

$$\tau(x, z, p) = \frac{1}{l}\theta(0, z, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l}\theta\left(\frac{k\pi}{l}, z, p\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \quad (89)$$

Mise à part la condition en  $z = 0$ , le système s'écrit alors de manière analogue au cas précédent :

$$\begin{pmatrix} \theta(0) \\ \frac{\sin(\alpha l)}{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^{\text{sup}}(e_1) \\ \phi(e_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{\text{sup}}(e_1) \\ \phi(e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^{\text{inf}}(e_1) + \varepsilon \int_0^b \psi(x, e_1, p) \cos(\alpha x) dx \\ \phi(e_1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta^{\text{inf}}(e_1) \\ \phi(e_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (90)$$

avec :

$$A_i(\alpha, p) = \text{ch}(\sqrt{(p + \alpha^2)e_i}) = D_i(\alpha, p)$$

$$B_i(\alpha, p) = \frac{1}{\sqrt{(p + \alpha^2)}} \text{sh}(\sqrt{(p + \alpha^2)e_i})$$

$$C_i(\alpha, p) = \sqrt{(p + \alpha^2)} \text{sh}(\sqrt{(p + \alpha^2)e_i}). \quad (91)$$

On peut aussi écrire pour les besoins ultérieurs du calcul, la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

3.2.3. Résolution de l'équation intégrale (90) par inversion de matrice. Dans ce cas, l'équation intégrale (90) en  $\psi$  peut se transformer en système linéaire ; en effet la fonction  $\psi$  peut s'exprimer à partir des fonctions  $\phi$  en utilisant la transformée inverse de Fourier (formule similaire à 89). On posera, de plus,  $\sin(ku)/k = u$  si  $k = 0$  :

$$\psi(x, e_1, p) = \frac{1}{l}\phi(0, e_1, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l}\phi\left(\frac{k\pi}{l}, e_1, p\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \quad (93)$$

Le système linéaire s'écrit, en exprimant  $\theta^{\text{sup}}$  et  $\theta^{\text{inf}}$  en fonction de  $\phi(e_1)$  grâce aux première et dernière relations matricielles (90).

$$-\frac{C(0, p)}{C_1(0, p)C_2(0, p)}\phi(0, e_1, p) + \frac{1}{C_1(0, p)}$$

$$= \varepsilon \left( \frac{b}{l}\phi(0, e_1, p) + \sum_{k=1}^{\infty} 2\phi\left(\frac{k\pi}{l}, e_1, p\right) \frac{\sin\left(\frac{k\pi b}{l}\right)}{k\pi} \right)$$

et :

$$-\frac{C\left(\frac{m\pi}{l}, p\right)}{C_1\left(\frac{m\pi}{l}, p\right)C_2\left(\frac{m\pi}{l}, p\right)}\phi\left(\frac{m\pi}{l}, e_1, p\right)$$

$$= \varepsilon \left( \frac{\sin\left(\frac{m\pi b}{l}\right)}{m\pi}\phi(0, e_1, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \phi\left(\frac{k\pi}{l}, e_1, p\right) \times \left( \frac{\sin\left(\frac{(k+m)\pi b}{l}\right)}{(k+m)\pi} + \frac{\sin\left(\frac{(k-m)\pi b}{l}\right)}{(k-m)\pi} \right) \right) \quad (94)$$

avec  $m$ , entier variant de 1 à l'infini.

A ce stade, la solution en  $\phi$  du problème est exacte. On peut encore présenter ce système sous forme matricielle :

$$[V] = (\varepsilon[M_2] + [M_1])^*[\Phi] \quad (95)$$

avec :

$[V]$  : Vecteur colonne, tel que :

$$V(m) = \frac{l}{C_1(0, p)} \delta_{0,m}, \quad (96)$$

$[M_2]$  : Matrice carrée, telle que :

$$M_2(m, k) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{(k+m)\pi b}{l}\right) & \sin\left(\frac{(k-m)\pi b}{l}\right) \\ (k+m)\pi & (k-m)\pi \end{pmatrix}. \quad (97)$$

$[M_1]$  : Matrice carrée diagonale, telle que :

$$M_1(m, k) = \frac{C\left(\frac{m\pi}{l}, p\right)}{C_1\left(\frac{m\pi}{l}, p\right) C_2\left(\frac{m\pi}{l}, p\right)} \left( \frac{1}{(2-\delta_{0,m})} \right) \delta_{k,m}. \quad (98)$$

$[\Phi]$  : Vecteur colonne, tel que :

$$\Phi(m) = \phi\left(\frac{m\pi}{l}, e_1, p\right) (2-\delta_{0,m}). \quad (99)$$

Avec  $m$  et  $k$  variant de 0 à l'infini et  $\delta_{k,m}$  symbole de Kronecker.

On peut poursuivre le calcul, de façon approchée, en tronquant la série (93), on obtient alors un système linéaire classique à résoudre numériquement en inversant de façon numérique la matrice :  $(\varepsilon[M_2] + [M_1])$ . Cette méthode peut être lourde. Pour éviter les erreurs dues à la convergence très lente de la série (phénomène de Gibbs), un grand nombre de termes sont nécessaires dans certains cas.

3.2.4. *Résolution de l'équation intégrale par méthode de perturbation.* Une autre méthode consiste à résoudre le système par la méthode de perturbation de la même façon qu'au paragraphe précédent.

Soit :

$$\phi(x, z, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x, z, p) \varepsilon^n. \quad (100)$$

On injecte les séries dans le système et on identifie terme à terme en  $\varepsilon^n$ . On obtient alors la solution :

A l'ordre  $\varepsilon^0$  :

On obtient sous forme matricielle :

$$[\Phi_0] = [M_1]^{-1} [V]. \quad (101)$$

ou encore :

$$\phi_0(0, e_1, p) = \frac{C_2(0, p)}{C(0, p)} = l \frac{\text{sh}(\sqrt{p})}{\text{sh}(\sqrt{p})} \quad (102)$$

et :

$$\phi_0\left(\frac{m\pi}{l}, e_1, p\right) = 0 \quad (103)$$

$m$  entier variant de 1 à l'infini.

A l'ordre  $\varepsilon^1$  :

On obtient sous forme matricielle :

$$[\Phi_1] = [-M_1]^{-1} [M_2] [\Phi_0] \quad (104)$$

ou encore :

$$\phi_1\left(\frac{m\pi}{l}, e_1, p\right) (2-\delta_{0,m}) = -\phi_0(0, e_1, p) M_2(m, 0) M_1(m, m) \quad (105)$$

$m$  variant de 0 à l'infini.

A l'ordre  $\varepsilon^2$ , on obtient une relation de récurrence :

$$[\Phi_n] = [-M_1]^{-1} [M_2] [\Phi_{n-1}] \quad (106)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \phi_n\left(\frac{m\pi}{l}, e_1, p\right) (2-\delta_{0,m}) &= \frac{-1}{M_1(m, m)} \\ &\times \left( \sum_{k=0}^n M_2(m, k) \phi_{n-1}\left(\frac{k\pi}{l}, e_1, p\right) (2-\delta_{0,k}) \right) \end{aligned} \quad (107)$$

$m$  variant de 0 à l'infini.

Cette méthode a l'avantage de ne pas nécessiter de tronquer les séries utilisées, puisqu'elle ne nécessite pas d'inversion de la matrice :  $(\varepsilon[M_2] + [M_1])$ . Elle est très rapide et précise pour des faibles valeurs de  $\varepsilon$ , puisqu'on peut se contenter de un ou deux termes dans l'expression (100). Cependant, la série (100) ne converge pas forcément pour des valeurs élevées de  $\varepsilon$ . On peut, malgré cela, utiliser une méthode d'accélération de la convergence, basée sur la recherche d'approximants de Padé du polynôme d'approximation (voir Aziz et Na [9], pour l'étude de la convergence de séries de la forme de (100), voir Baker [14], pour une présentation des approximants de Padé et voir Macdonald [15], pour une présentation de l'Epsilon-algorithme permettant de calculer de façon numérique les approximants de Padé de sommes partielles de la série (100)).

Une fois  $\phi(m\pi/l, e_1, p)$  connu pour tout  $m$ , l'expression de la température en face arrière s'écrit dans l'espace de Laplace :

$$\begin{aligned} \tau(x, 1, p) &= \frac{1}{l} \frac{\phi(0, e_1, p)}{C_2(0, p)} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{l} \frac{\phi\left(\frac{m\pi}{l}, e_1, p\right)}{C_2\left(\frac{m\pi}{l}, p\right)} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (108)$$

3.2.5. *Etude en valeur moyenne.* La valeur moyenne de température en face arrière  $\bar{\tau}(1, p)$  s'écrit dans l'espace de Laplace, grâce à (108) :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(1, p) &= \frac{1}{l} \int_0^l \tau(x, 1, p) dx = \frac{1}{l} \theta(0, 1, p) \\ &= \frac{1}{l} \frac{\phi(0, e_1, p)}{C_2(0, p)}. \end{aligned} \quad (109)$$

Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit pour ne considérer qu'un seul terme de la série (100) :

$$\bar{\tau}(1, p) = \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} - \varepsilon \left( \frac{b}{l} \right) \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2) \operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_1)}{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)}) \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})}. \quad (110)$$

Cette expression, très simple, peut permettre un traitement rapide de résultats expérimentaux, en contrôle non-destructif thermique, en prenant néanmoins en compte les effets bidimensionnels.

Si le matériau est de longueur infinie, le contraste dû à la perturbation (terme de droite) disparaît.

### 3.3. Retour numérique dans l'espace réel

Il existe une abondante littérature relative aux algorithmes numériques de transformation de Fourier utilisés par exemple en traitement d'image. Un exposé général sur les transformations de Fourier peut être trouvé dans Press *et al.* [16].

Nous examinons rapidement les caractéristiques de ces méthodes en vue de les adapter à notre problème.

Il est question ici de calculer l'intégrale (99) si le matériau est d'extension infinie ou la série (108) si le matériau est d'extension finie.

Pour s'affranchir de la borne infinie de l'intégrale (99), il est nécessaire de supposer le matériau de longueur  $l$  finie et isolé ou nul en  $x = l$ . La longueur  $l$  doit être grande devant les dimensions caractéristique des conditions aux limites en  $x$  ou des hétérogénéités du matériau ( $b$  dans notre cas). Une expression calculable de (65) est alors :

$$\tau(x, z, p) = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left(\frac{1}{l}\right) \theta(0, z, p) + \sum_{k=1}^z \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left(\frac{2}{l}\right) \theta\left(\frac{k\pi}{l}, z, p\right) \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \quad (111)$$

Ainsi les problèmes relatifs au milieu d'extension finie ou infinie se traitent numériquement de la même manière (111) semblable à (89).

La nécessité du calcul implique de tronquer les séries (111) ou (89).

Si on calcule  $N$  termes de cette série, on introduit alors la notion de fréquence maximale d'échantillonnage  $\alpha_{\max}$  telle que :

$$\alpha_{\max} = \frac{N\pi}{l}. \quad (112)$$

Cette fréquence maximale définit dans l'espace réel un pas d'échantillonnage permettant de déterminer  $N$  valeurs de la température en  $N$  valeurs de  $x$  :

$$\Delta x = \frac{l}{N}. \quad (113)$$

Si on désire décrire avec précision l'évolution de la température autour du défaut, il faut que le pas

d'échantillonnage soit au moins inférieur sinon petit par rapport à  $b$ .

La Transformée de Fourier Rapide (ou Fast Fourier Transform), (Cooley et Tukey [17]), permet de déterminer à partir de  $N$  valeurs de  $\theta$  en  $\alpha_k = (k\pi/l)$ ,  $N$  valeurs de  $\tau$  en  $x_q = (ql/N)$ ,  $q$  variant de 0 à  $N-1$ , en un nombre réduit d'opérations ( $N \operatorname{Log}_2(N)$  au lieu de  $N^2$ ).

L'algorithme est adaptable à des séries de cosinus ou de sinus (voir [16]).

A titre d'exemple, on peut exprimer à partir de (74) ou (108) en prenant en compte uniquement un terme de la série (100). Les  $N$  valeurs de  $\tau((ql/N), l, p)$  sont reliées aux  $N$  valeurs de  $\phi((k\pi/l), z, p)$  et soit calculées par l'algorithme de F.F.T., soit directement traduites par :

$$\tau\left(\frac{ql}{N}, 1, p\right) = \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} - \varepsilon \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_2)}{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \left( \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)}e_1)}{\operatorname{sh}(\sqrt{(p)})} \left( \frac{b}{l} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \left( \frac{2}{k\pi} \right) \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(p+(k\pi/l)^2}e_1)}{\operatorname{sh}(\sqrt{(p+(k\pi/l)^2})} \times \sin\left(\frac{k\pi b}{l}\right) \cos\left(\frac{k\pi q}{N}\right) \right). \quad (114)$$

Le spectre des températures est calculé en 'retournant' les valeurs  $\theta(1, k\pi/l, p)$  dans l'espace temporel. L'algorithme de Stehfest [18] nous a paru de mise en oeuvre très simple et très rapide dans le cas où l'on calcule peu de profils au cours du temps. Il donne, de plus, une bonne précision dans le cas de l'exemple traité (réponse au Dirac). Dans le cas où le signal temporel est quelconque, et (ou) le cas où l'on désire calculer de nombreux profils au cours du temps, il est plus intéressant d'utiliser la méthode de Dubner et Abate [19] améliorée par Hsu et Dranoff [20], qui est basée elle aussi sur l'utilisation de la transformée de Fourier rapide. (Une étude comparée de ces méthodes peut être trouvée dans Davies et Martin [21].)

Ces algorithmes ont été appliqués aux transferts thermiques dans les matériaux composites par Kant et Decker [22].

### 3.4. Résultats numériques

Nous avons calculé des exemples d'évolution des contrastes de température en face arrière, soit  $\Delta T(x, l, t)$ , transformée inverse de Laplace de :

$$\Delta \tau(x, l, p) = \tau(x, l, p) - \frac{1}{\sqrt{(p)} \operatorname{sh}(\sqrt{(p)})}. \quad (115)$$

Les résultats présentés ci-dessous permettent de comparer les mérites des différentes méthodes.

La Fig. 10 présente des profils de contraste de température calculés pour différentes valeurs de  $N$ , dans

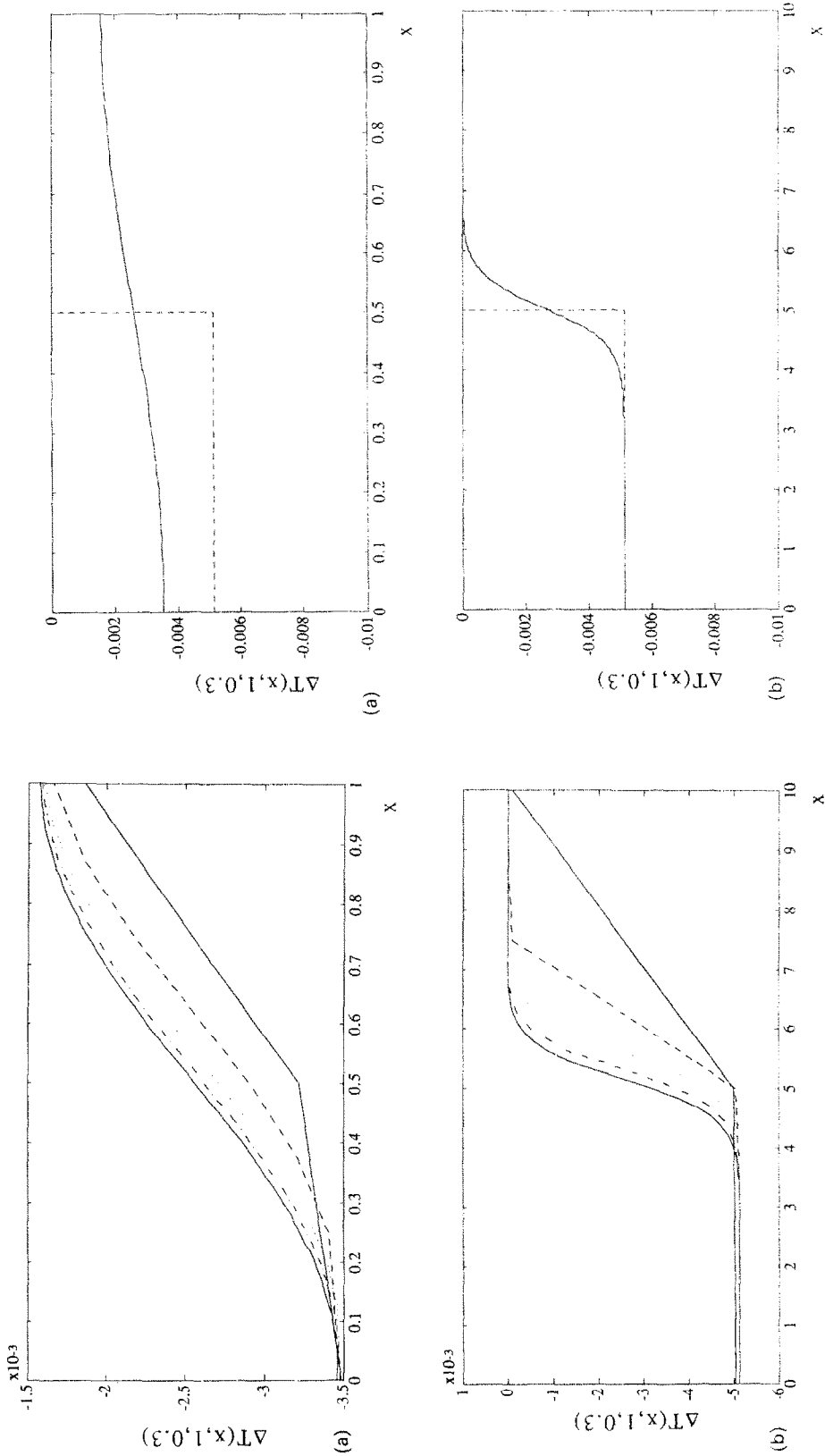


Fig. 10. Répartitions de contraste de température en face arrière ( $\Delta T(x, l, 0, 3)$ ) calculées avec différents nombres de termes  $N$  dans la série (2.3-1), avec les conditions suivantes:  $l = 0.3$ ;  $\varepsilon = 0.01$ , dans deux cas de géométrie différents: pour les valeurs de  $N$  suivantes:  $\dots$ ;  $N = 4$ ;  $\dots$ ;  $N = 8$ ;  $\dots$ ;  $N = 16$ ;  $\dots$ ;  $N = 32$ ;  $\dots$ ;  $N = 64$ ;  $\dots$ ;  $N = 128$ ;  $\dots$ ;  $N = 256$ . (a)  $b = 0.5$ ;  $l = 1$ ; (b)  $b = 5$ ;  $l = 10$ . Les distributions calculées avec  $N = 64$ ,  $N = 128$  et  $N = 256$  sont confondues, quelle que soit la méthode de calcul (inversion de matrice ou perturbation).

Fig. 11. Comparaison entre le calcul bidimensionnel et celui obtenu par l'expression monodimensionnelle (79), dans le cas  $l = 0.3$ ;  $\varepsilon = 0.01$ ;  $c_j = 0.5$ . (a)  $b = 0.5$ ;  $l = 1$ ; (b)  $b = 5$ ;  $l = 10$ .

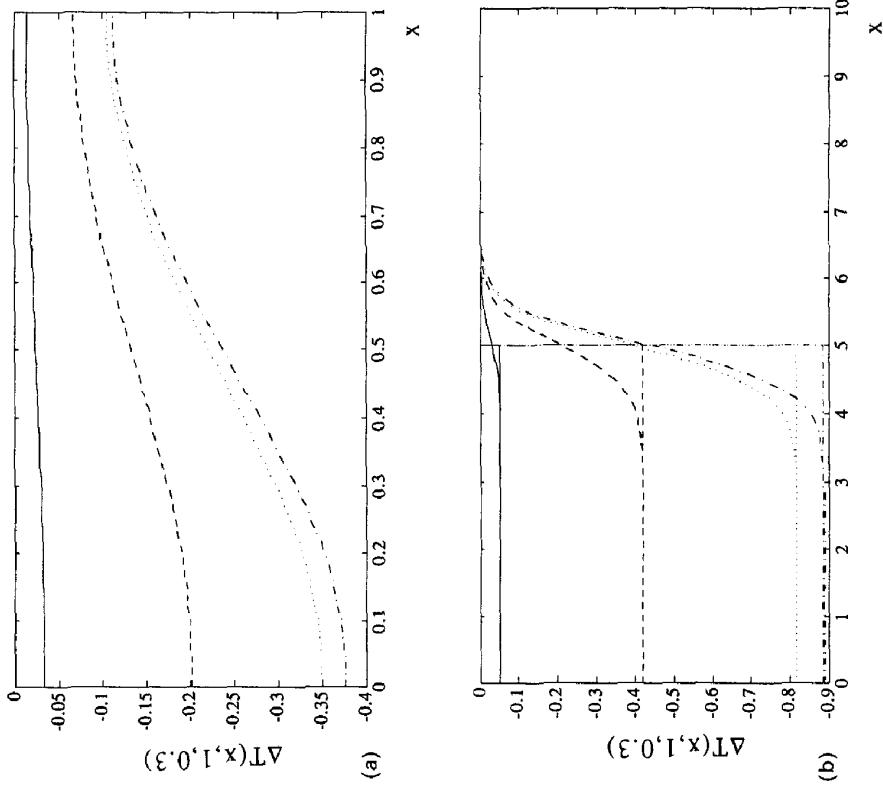


FIG. 13. Résultats obtenus pour différentes valeurs de  $\epsilon$  par la méthode d'inversion de matrice ( $l = 0.3$ ;  $\epsilon_1 = 0.5$ ). —:  $\epsilon = 0.1$ ; ---:  $\epsilon = 1$ ; ····:  $\epsilon = 10$ ; -·-·-·:  $\epsilon = 100$ . (a)  $b = 0.5; l = 1$ ; (b)  $b = 5; l = 10$ .

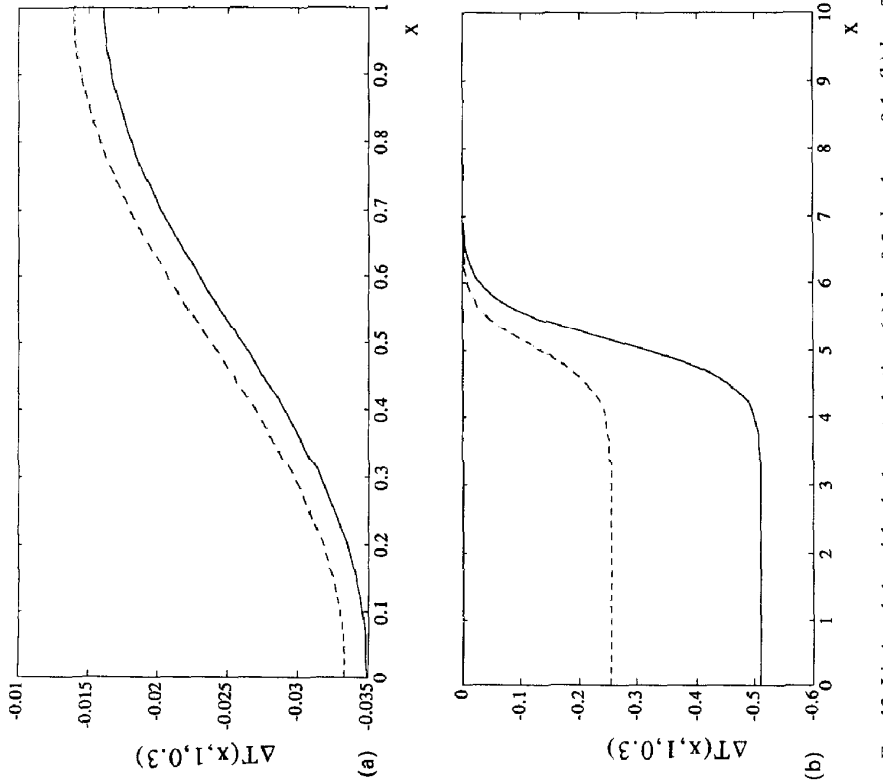


FIG. 12. Limites de la méthode de perturbation. (a)  $b = 0.5; l = 1; \epsilon = 0.1$ ; (b)  $b = 5; l = 10; \epsilon = 0.5$ . —: méthode de perturbation à un terme; ---: méthode de perturbation à 11 termes; ····: inversion de matrice). Les résultats de la méthode de perturbation à 11 termes et de l'inversion de matrice sont confondus.

deux cas de géométrie différents ( $l = 10$  et  $l = 1$  avec  $b/l = 0.5$  dans les deux cas) et pour  $\varepsilon = 0.01$ . On constate que  $N = 64$  donne dans les deux cas, une précision suffisante. Il faut souligner que dans ce cas de valeur de  $\varepsilon$ , le calcul par méthode de perturbation est beaucoup plus rapide (2,6 s sur micro-ordinateur) que par une méthode d'inversion de matrice classique (800 s).

La Fig. 11 montre la comparaison entre le calcul bidimensionnel et celui obtenu par l'expression monodimensionnelle (78) sous le défaut. On constate que dans le cas a, (78) n'est pas une bonne approximation.

La Fig. 12 montre les limites de la méthode de perturbation. On a pu aller jusqu'à  $\varepsilon = 0.5$  dans le cas de la géométrie a et  $\varepsilon = 0.1$  dans le cas b, avec 11 termes de la série (100) accélérée par l'Epsilon algorithme. Le temps de calcul est alors d'environ 180 s. Pour des valeurs de  $\varepsilon$  plus grandes, la méthode de perturbations n'apporte aucun avantage, par rapport à l'inversion de matrice.

Les résultats obtenus pour différentes valeurs de  $\varepsilon$  sont récapitulés sur la Fig. 13, par la méthode d'inversion de matrice. On constate que pour des valeurs de  $\varepsilon$  supérieures à 10, l'amplitude des contrastes varie peu.

#### 4. CONCLUSION

L'utilisation de transformations intégrales sur les variables d'espace permet de simplifier la présentation de problèmes bi ou tridimensionnels, dans le cas de multicouches.

La solution obtenue peut être utilisée directement dans l'espace de Laplace-Fourier, ou par l'étude des limites de la solution (temps courts, temps longs, moyennes spatiales).

Le principal avantage des cas énumérés est de pouvoir utiliser les algorithmes de transformées de Fourier rapide et de retour numériques de Laplace, pour revenir dans l'espace réel.

Le développement de méthodes de perturbations permet une utilisation itérative des quadripôles thermiques. Dans le cas de l'étude du transfert thermique au travers d'un défaut bidimensionnel de faible résistance, on a ainsi pu obtenir une solution particulièrement simple et rapide.

Dans le cas de défauts bidimensionnels quelconques, l'écriture dans l'espace de Fourier, par transformation intégrale réduit le problème à la résolution d'un système linéaire.

On a pu comparer sur des exemples les mérites des deux méthodes de résolution.

#### REFERENCES

1. A. Degiovanni, Conduction dans un mur multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôle. *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 553-557 (1988).
2. J. M. Dorkel, A. Napierski and P. Leturcq, Implementation of a new method for thermal analysis of plane multilayered systems. *Numer. Heat Transfer* **13**(3), 319-336 (1988).
3. N. Ozizik, *Heat Conduction*. Wiley, New York (1990).
4. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids* (Chap. 17). Clarendon Press, Oxford (1959).
5. I. N. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*. McGraw-Hill, New York (1972).
6. D. Maillat, Apport des méthodes analytiques à l'identification de paramètres et à la conduction inverse en thermique, Thèse d'état INPL (1991).
7. A. Degiovanni, G. Sinicki, A. Gery et M. Laurent, Un modèle de résistance thermique de contact en régime permanent. *Rev. Gen. Therm.* **267**, 161-174 (1984).
8. A. Degiovanni et C. Moyne, Résistance thermique de contact en régime permanent—Influence de la géométrie du contact. *Rev. Gen. Therm.* **334**, 257-263 (1989).
9. A. Aziz and T. Na, *Perturbation Methods in Heat Transfer*. Springer, Berlin (1984).
10. A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*. Wiley, New York (1973).
11. A. H. Nayfeh, A continuum mixture theory of heat conduction in laminated composites. *Trans. A.S.M.E. J. Appl. Mech.* **399**, (June 1975).
12. K. D. Hagen, A solution to unsteady conduction in periodically layered, composite media using a perturbation method—Technical note, *Trans. A.S.M.E. J. Heat Transfer* **109**, (November 1987).
13. F. Oberhettinger, *Fourier Transform Tabellen*. Springer, Goettingen (1957).
14. G. A. Baker, The theory and application of Padé approximant method. In *Advances in Theoretical Physics* (Edited by J. Bruekner), pp. 1-58. Academic Press, New York (1965).
15. J. R. Macdonald, Examples of use of epsilon algorithm. *J. Appl. Phys.* **35**, 3034-3041 (1964).
16. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, London (1989).
17. J. W. Cooley and J. W. Tukey, An algorithm for the machine calculation of Complex Fourier Transform Series. *Math. Comp.* **19**, 297-339 (1965).
18. H. Stehfest, Algorithm 368. Numerical inversion of Laplace transforms, *Comm. A.C.M.* **13**, 47-49 (1970).
19. H. Dubner and J. Abate, Numerical inversion of Laplace transform by relating them to the finite Fourier cosine transform, *J. Assoc. Comp. Mach.* **15**(1), 115-123 (1968).
20. J. Hsu and J. S. Dranoff, Numerical inversion of certain laplace transforms by the direct application of the fast fourier transform (fft) algorithm. *Comp. Chem. Engng* **11**(2), 101-110 (1987).
21. J. Davies and B. Martin, Numerical inversion of the laplace transform: A survey and comparison of methods, *J. Comp. Phys.* **33**, 1-32 (1979).
22. R. Kant and K. L. Decker, Laser induced heating of a multilayered medium resting on a half-space: Part II—Moving Source, *Trans. A.S.M.E. J. Heat Transfer* **113**, (February 1991).



THERMAL QUADRIPOLES METHOD EXTENDED WITH INTEGRAL TRANSFORMS—  
CALCULATIONS OF THE HEAT TRANSFER ACROSS A TWO-DIMENSIONAL PLANE  
CRACK

**Abstract**—The quadripole method, used in the case of monodirectional diffusion problems, is extended to bi- or tri-directional cases. The main point is to use integral transforms (usually Fourier-transforms) for several space variables and Laplace transform for the time variable. The calculus of the heat transfer across multilayer materials is then presented as a simple matrix product in the transformed space. A second part is devoted to the calculus of the heat transfer across a finite two-dimensional defect. Then we use the quadripole method nor perturbation and matrix inversion method to solve the integral equation, arising in this problem.